

有限分析方法求解粘性可压缩紊流*

南京航空航天大学 徐 雕** 吴国钊

【摘要】 本文将有限分析方法进一步推广到粘性可压缩紊流流场的数值研究,在贴体座标网格上数值分析了单列和串列叶栅内粘性可压缩紊流流场。计算表明,有限分析方法具有数值精度高,稳定性好和收敛速度快等优点,适于粘性可压缩紊流流场数值计算。

关键词: 粘性可压缩紊流 数值计算 流体力学

1 控制方程的有限分析离散

有限分析数值方法^[1,2]是在网格单元上求解局部线化的非线性偏微分方程,由微分方程的解析解构造离散代数方程。它的离散格式保留了原微分方程的特点,能够根据对流的方向和大小自动调整格式的系数,具有较高的数值精度和数值稳定性。本文在粘性不可压缩紊流流场有限分析解的基础上^[3,4],进一步将有限分析方法应用到叶栅内粘性可压缩紊流流场的计算。作为验证,首先计算了单列叶栅内流场,并与实验结果进行了对照,然后又分别计算了来流 Ma 数为 0.54 和 0.72 时串列叶栅内流场,为其气动设计提供了详细的流场资料。

定常二维粘性可压缩紊流平均 $N-S$ 方程及 $k-\epsilon$ 紊流模型方程可统一表示为

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \varphi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \varphi) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_e \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_e \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right) + S \varphi \quad (1)$$

式中各项的意义如表 1 所示。

表 1 (1) 式各项意义

方 程	φ	μ_e	$S \varphi$
连 续	1	0	0
x 向动量	u	$\mu + \mu_t$	$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_e \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_e \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right)$
y 向动量	v	$\mu + \mu_t$	$-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_e \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_e \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right)$
紊动能	k	$c_2 \mu_t$	$G - \rho \epsilon$
紊动能耗散率	ϵ	$c_3 \mu_t$	$c_4 G \epsilon / k - c_5 \rho \epsilon^2 / k$

其中 $\mu_t = c_1 \cdot Re \cdot \rho k^2 / \epsilon$, $G = \mu_t \{ 2 [(\partial u / \partial x)^2 + (\partial v / \partial y)^2] + (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x)^2 \}$

$$c_1 = 0.09, \quad c_2 = 1.0, \quad c_3 = 0.769, \quad c_4 = 1.44, \quad c_5 = 1.92$$

对于可压缩流动, 须考虑流体的压缩性。如认为流场内总焓不变, 可得无因次能量方程

$$\frac{p}{R\rho} + \frac{k-1}{2}(u^2 + v^2) Ma_o^2 = 1 + \frac{k-1}{2} Ma_o^2 \quad (2)$$

其中 $R = 1 / (k Ma_o^2)$, $k = c_p / c_v$ 。引入曲线坐标系 $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ 。将方程 (1) 变换到 $\xi-\eta$ 曲线坐标上, 经整理得曲线坐标系上无因次控制方程的一般形式

$$2A\varphi_\xi + 2B\varphi_\eta = C\varphi_{\xi\xi} + D\varphi_{\eta\eta} + g \quad (3)$$

其中

$$2A = Re_f \cdot \rho U, \quad 2B = Re_f \cdot \rho V, \quad C = \alpha / J, \quad D = \gamma / J, \quad U = y\eta_u - x\eta_v, \quad V = -y\xi u + x\xi v$$

$$g = -2\beta\varphi_\eta / J + (1/\mu_e)(\alpha\mu_{e\xi} - \beta\mu_{e\eta})\varphi_\xi / J + (1/\mu_e)(\gamma\mu_{e\eta} - \beta\mu_{e\xi})\varphi_\eta / J + \tau\varphi_\xi / J + \sigma\varphi_\eta / J + Re_f JS\varphi$$

$$Re_f = Re / \mu_{ef}, \quad \mu_{ef} = (\mu + \mu_t) / \mu, \quad \alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2, \quad \beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta$$

$$\gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2, \quad \sigma = (y_\xi D_x - x_\xi D_y) / J, \quad \tau = (x_\eta D_y - y_\eta D_x) / J$$

$$D_x = \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta}, \quad D_y = \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta}, \quad J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$$

在图 1 所示的网格单元上求解控制方程 (3), 设方程中的系数 A 、 B 、 C 、 D 和源项 g 为常数, 令 $\varphi = \psi + [g(A\xi + B\eta)] / [2(A^2 + B^2)]$, 代入方程

(1), 经整理得

$$2A\psi_\xi + 2B\psi_\eta = C\psi_{\xi\xi} + D\psi_{\eta\eta} \quad (4)$$

对于亚音速流动, 方程 (4) 为椭圆型常系数微分方程, 其定解条件包括所有边界。本文以线性函数和指数函数构造其在网格单元上的解析边界条件, 因为这些函数也满足微分方程。以北边为例, 设 $\psi(\xi) = a_N \{ \exp(2A\xi/C) - 1 \} + b_N \xi + c_N$, 其中 a_N 、 b_N 、 c_N 为待定系数, 由该边界上 3 个节点的 ψ 值确定。

令 $\psi(\xi, \eta) = W(\xi, \eta) \cdot \exp(A\xi/C + B\eta/D)$, 代入方程 (4), 得

$$CW_{\xi\xi} + DW_{\eta\eta} = (A^2/C + B^2/D)W \quad (5)$$

相应地, 边界条件的表达式也改变为

$$W^N(\xi, k) = W^1(\xi) = \exp(-Bk/D) \cdot [a_N \exp(A\xi/C) + b_N \xi \exp(-A\xi/C) + (c_N - a_N) \exp(-A\xi/C)] \quad (6)$$

应用线性方程的叠加原理, 可以将原问题拆成 4 个具有简单边界条件的微分方程的叠加

$$W(\xi, \eta) = W^E(\xi, \eta) + W^W(\xi, \eta) + W^N(\xi, \eta) + W^S(\xi, \eta) \quad (7)$$

北边的子问题可以写成

$$CW_{\xi\xi}^N + DW_{\eta\eta}^N = (A^2/C + B^2/D)W^N, \quad W^N(\xi, k) = W^1(\xi)$$

$$W^N(\xi, -k) = W^N(h, \eta) = W^N(-h, \eta) = 0 \quad (8)$$

其它 3 个子问题的形式类似。这 4 个子问题均可用分离变量法求解, 仍以北边子问题为例, 令

$W^N(\xi, \eta) = X(\xi) \cdot Y(\eta)$, 代入方程 (8), 得

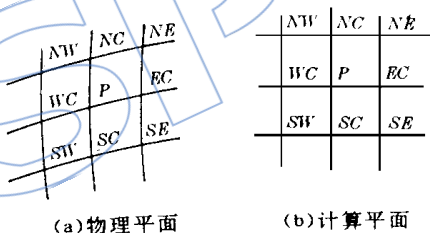


图 1 网格单元

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad X(-h) = X(h) = 0 \quad (9a)$$

$$Y'' - (A^2/C + B^2/D + C\lambda^2)Y/D = 0, \quad Y(-k) = 0, \quad Y(k) = W_1(\xi) \quad (9b)$$

在相应的边界条件下求解方程 (9), 可得方程 (8) 的解。分别求出 4 个子问题的解, 叠加起来, 最终得原微分方程的局部线化解在网格单元中心节点的表达式

$$\varphi = C_{NE}\varphi_{NE} + C_{NW}\varphi_{NW} + C_{SE}\varphi_{SE} + C_{SW}\varphi_{SW} + C_{EC}\varphi_{EC} + C_{WC}\varphi_{WC} + C_{NC}\varphi_{NC} + C_{SC}\varphi_{SC} + C_p g \quad (10)$$

2 离散方程的数值求解

2.1 压力修正方程、壁面函数

本文采用压力扰动方法处理速度压力耦合, 基本思想是在假设的压力场 p^* 下求解动量方程, 得准速度场 u^*, v^* 。以此速度场代入连续方程, 得压力修正方程

$$A_p p' = A_{ep} e' + A_{wp} w' + A_{np} n' + A_{sp} s' - M \quad (11)$$

此处 p' 为扰动压力, M 为残余流量。解方程 (11), 得 p' 。从而做出对速度 u^*, v^* 和压力 p^* 的修正 $u = u^* + u', v = v^* + v', p = p^* + p'$ 。

本文采用壁面函数方法处理近壁区流动。第 1 层网格线布置在离壁面 Δ_s 距离处, 以壁面函数确定此层流动参数, 这样不仅减少了网格节点数目, 而且还提高了数值精度。

2.2 收敛准则、数值迭代程序

本文采用局部和整体误差作为收敛准则, 当前后两次迭代的 $|\varphi^{i+1} - \varphi^i| < \delta_1$, $\max |\varphi^{i+1} - \varphi^i| < \delta_2$ 。则认为数值迭代收敛。 δ_1 和 δ_2 为给定精度要求。

数值计算的过程如下: (1) 输入边界条件, 参数和网格座标, 布置初始流场。(2) 解能量方程, 得密度场 ρ 。(3) 解 $k-\epsilon$ 方程, 得 k, ϵ 和 μ_t 。(4) 计算有限分析格式系数, 在假设的速度场和压力场下解动量方程, 得新速度场 u^* 和 v^* 。(5) 解压力修正方程, 得 p' 。(6) 修正速度和压力, 得 u, v, p 。(7) 检查是否达到指定精度, 如未达到, 则以 u, v, p 作为 u^*, v^*, p^* , 返回第 (2) 步, 直到达到收敛要求。(8) 输出最终结果。

3 数值计算实例

采用以上推导的粘性可压缩紊流场有限分析离散格式, 计算了文献 [5] 中的涡轮叶栅

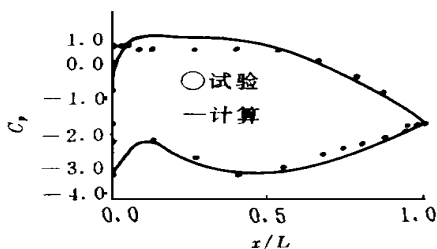


图 2 单列叶栅压力系数分布

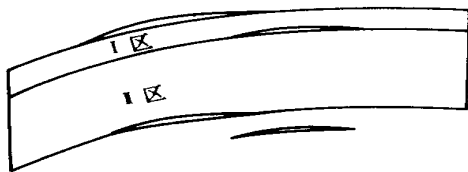


图 3 串列叶栅

内流场。来流 Re 数为 5.9×10^5 , Ma 数为 0.1。以贴体网格技术^[6]生成叶栅网格, 网格节点数为 65×15 。流场进口给定 $Re, Ma, \beta, T^*, \rho, u, v$ 和紊流度, 流场出口边上所有控制变量

的流线方向的一阶导数为零。

图 2 为本文计算的叶片表面压力系数 C_p 在叶栅中间流面上的计算值与试验值的比较。可以看出两者吻合较好。还计算了某发动机压气机串联叶栅 (图 3) 内粘性可压缩紊流流场。

仍采用贴体网格。网格节点数为 99×20 。本文的串联叶栅后排伸入前排, 故在网格划分上采用分区方法, 以经由后排叶片的准流线为界, 将流场分成上下两区。边界条件的提法与第 1 个算例类似, 但来流 $Re = 2.0 \times 10^5$, Ma 分别为 0.54 和 0.72; 初始流场按一维势流布置; 以低松弛方法进行数值迭代, 计算 500 次收敛, $\delta_2 < 2.0 \times 10^{-4}$ 。图 4 和图 5 分别为 Ma 为 0.54 和 0.72 时串联叶栅前后叶片表面压力系数 C_p 的分布。

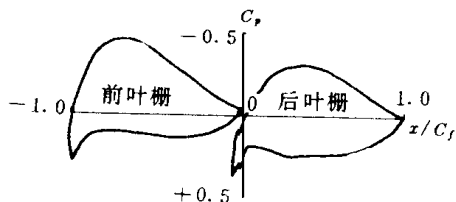


图 4 串联叶栅压力系数分布 ($Ma = 0.54$)

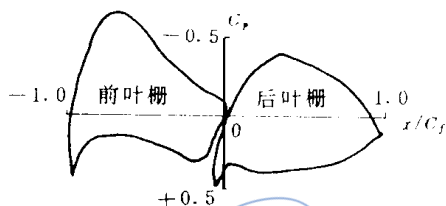


图 5 串联叶栅压力系数分布 ($Ma = 0.72$)

结论 本文在粘性不可压缩紊流流场有限分析的基础上进一步将此方法应用于粘性可压缩紊流流场的数值分析中, 在曲线坐标系上计算了单列和串联叶栅的粘性可压缩紊流流场。单列叶栅的计算值与试验值的吻合程度令人满意。数值分析表明, 有限分析方法数值精度较高, 稳定性好, 收敛速度快, 可用于粘性可压缩紊流流场的数值分析。

参 考 文 献

- 1 Chen C J, Li P. The Finite Analytic Method for Steady and Unsteady Heat Transfer Problem. ASME Paper 80-HT-86
- 2 Chen C J, et al. The Finite Analytic Solution of Heat Transfer in Two-Dimensional Cavity Flow. J. Numerical Heat Transfer, 1981, (4): 179
- 3 徐雕, 吴国钊. 单列叶栅紊流流场有限分析数值研究. 航空动力学报, 1991, 6 (2)
- 4 徐雕, 吴国钊. N-S 方程有限分析数值研究. 航空学报, 1991, 12 (11)
- 5 Langston L S, Nice M L, Hooper R M. Three-Dimensional Flow within a Turbine Cascade Passage. ASME J. of Engineering for Power, 1977, 99 (1)
- 6 Thompson J F, et al. Boundary Fitted Curvilinear Coordinate System for Solution of Partial Differential Equation on Fields Containing any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies. NASA CR-2729, 1977

(责任编辑 魏星禄)